Travaux pratiques | [D] TP n°1

Méthode de Bessel

L'objectif de ce TP est de déterminer la distance focale f' d'une lentille mince convergente à l'aide de la méthode de Bessel. Les mesures réalisées seront analysées par différentes méthodes : incertitudes de type B, de type A, et par régression linéaire.

I - Analyse théorique

La méthode de Bessel permet une mesure très précise de la distance focale d'une lentille mince convergente. Son principe est le suivant.

Soit un objet AB et un écran $\mathcal{E}$ placés à une position fixe. Soit une lentille mince convergente $\mathcal{L}$, de centre O et de focale f', dont la position est réglable par l'expérimentateur. Le but est de chercher les positions de la lentille qui permettent d'observer l'image $\mathrm{A'B'}$ de l'objet AB sur l'écran.

Notons $\mathrm{L} = \overline{\mathrm{AA'}}$ la distance algébrique (fixe) entre l'objet et l'écran.

Notons $x = \overline{\mathrm{OA}}$ la distance algébrique (variable) entre la lentille et l'objet.

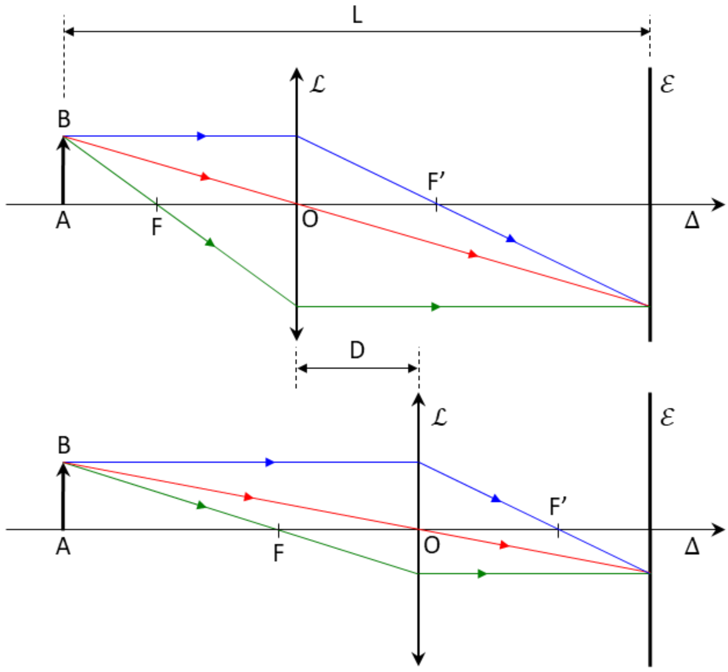
Il vient donc :

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{AA'}} = x + \mathrm{L}$$

La relation de conjugaison de Descartes se réécrit ainsi :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+\mathrm{L}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2 + \mathrm{L}\,x + f'\mathrm{L} = 0}$$



Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = \mathrm{L}^2 - 4f'\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathrm{L} - 4f')$$

Il est positif si et seulement si : $\mathrm{L} \geq 4f'$. Lorsque ce critère est vérifié, il existe deux solutions :

$$\boxed{x_\pm = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{L} \pm \sqrt{\Delta}\right)}$$

En notant D la distance entre ces deux positions :

$$\mathrm{D} = x_+ - x_- = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\mathrm{L}^2 - 4f'\mathrm{L}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f' = \frac{\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2}{4\mathrm{L}}}$$

II - Partie expérimentale

Dans cette partie, nous allons réaliser quelques relevés expérimentaux. Ces données seront traitées de plusieurs manières différentes dans la suite du TP.

II.1 - Observations qualitatives

- Prendre une lentille convergente : il s'agit d'une lentille plus large au centre que sur ces bords, qui doit grossir un texte lorsqu'on le regarde à travers la lentille (effet loupe).

- Placer un objet et un écran « suffisamment proches » l'un de l'autre. Vérifier que, quel que soit la position de la lentille, l'image ne se forme jamais sur l'écran.

On se trouve alors dans la condition $\mathrm{L} < 4f'$.

Placer un objet et un écran « suffisamment éloignés » l'un de l'autre. Vérifier qu'il existe deux positions de la lentille permettant d'observer une image sur l'écran.

On se trouve alors dans la condition $\mathrm{L} > 4f'$. Attention, si l'objet et l'écran sont « trop » éloignés, l'une des images sera très petite et donc difficile à observer. Si vous êtes dans cette situation, réduire simplement la distance entre l'objet et l'écran pour faciliter l'observation.

II.2 - Mesures

Réaliser le protocole suivant ci-dessous. Les résultats sont à stocker dans le tableau ci-dessous.

(1) Fixer la position de l'objet. On note x_A sa position lue sur le banc d'otique.

(2) Fixer la position de l'écran, tout en respectant le critère $\mathrm{L} > 4f'$ (à vérifier expérimentalement, puisque l'on ne connaît pas encore la valeur de f'). On note $x_{\mathrm{A}'}$ sa position lue sur le banc d'otique.

(3) Mesurer les positions x_+ et x_- de la lentille permettant d'observer l'image de l'objet sur l'écran.

(4) Répéter les points (2) et (3) afin de compléter le tableau pour différentes valeurs de $x_{\mathrm{A}'}$.

⚠ Ne pas toucher au montage après la dernière prise de mesure, vous en aurez besoin au III.1

$\boldsymbol{x_\mathrm{A}}$ (cm)	$\boldsymbol{x_{\mathrm{A}'}}$ (cm)	$\boldsymbol{x_-}$ (cm)	$\boldsymbol{x_+}$ (cm)

III - Analyse des mesures

III.1 - Analyse d'une mesure unique (incertitudes de type B)

Dans cette partie, nous allons déterminer f' à l'aide d'une seule mesure (et non pas de l'ensemble des 7 mesures). Nous allons nous servir de la dernière mesure.

Dans la partie théorique, nous avons montré que :

$$f' = \frac{\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2}{4\mathrm{L}}$$

$\boldsymbol{x_\mathrm{A}}$	$\boldsymbol{x_{\mathrm{A}'}}$	$\boldsymbol{x_-}$	$\boldsymbol{x_+}$	**D**	**L**	$\boldsymbol{f'}$
$\boldsymbol{u(x_\mathrm{A})}$	$\boldsymbol{u(x_{\mathrm{A}'})}$	$\boldsymbol{u(x_-)}$	$\boldsymbol{u(x_+)}$	$\boldsymbol{u(\mathrm{D})}$	$\boldsymbol{u(\mathrm{L})}$	$\boldsymbol{u(f')}$

> Toutes les grandeurs du tableau sont données en cm.

Calculer $\mathrm{D} = x_+ - x_-$ et $\mathrm{L} = x_{\mathrm{A}'} - x_\mathrm{A}$. En déduire f'.

Pour les 4 paramètres x_i de la dernière mesure (notés $\bar{x}_i$ dans le cours D2, II.2), estimer le demi-intervalle de confiance $\Delta(x_i)$ puis en déduire l'incertitude-type $u(x_i)$.

À l'aide de la formule de composition des incertitudes (cours D2, III.1), déterminer $u(\mathrm{D})$ et $u(\mathrm{L})$.

Par soucis de simplicité, nous allons utiliser l'ordinateur pour déterminer $u(f')$.

Ouvrir le logiciel « Spyder ». Dans Spyder, ouvrir le script Python « analyse_mesure_unique.py » qui se trouve dans le dossier commun des MPSI, Physique, TP. Compléter, au début du script, vos valeurs de L, D, $u(\mathrm{L})$ et $u(\mathrm{D})$. Lancer le code pour obtenir f' et $u(f')$.

III.2 - Analyse de la série de mesure par analyse statistique (incertitudes de type A)

Dans cette partie, nous allons faire une analyse statistique sur l'ensemble de vos 7 mesures. La valeur de f' ainsi obtenue devrait être plus précise que dans la partie précédente.

- Dans Spyder, ouvrir le script Python « analyse_serie_mesure.py ». Recopier votre tableau du II.2 en stockant chacune des 4 variables dans une liste.

Les listes Python ne sont pas faites pour réaliser des opérations mathématiques dessus. Il nous faut transformer les listes en arrays (traduire par tableau ou matrice en français), grâce au module « numpy ».

<u>Exemples</u> :

Soit x = [1, 2, 3] une liste.

Commande	**Résultat**
x + 5	Error
x + [5]	[1, 2, 3, 5]
x * 2	[1, 2, 3, 1, 2, 3]
x / 3	Error

Soit x = np.array(x), permettant de transformer x en array (on note x ce nouvel array, ce qui détruit donc au passage la liste x).

Commande	**Résultat**
x + 5	array([6, 7, 8])
x * 2	array([2, 4, 6])
x **2	array([1, 4, 9])
np.exp(x)	array([2.718, 7.389, 20.085])

Soit y = np.array([10, 11, 12]) un autre array de la **même taille** que x.

Commande	**Résultat**
x + y	array([11, 13, 15])
x * y	array([10, 22, 36])
y **x	array([10, 121, 1728])

- Transformer vos listes en arrays à l'aide de la commande : x = np.array(x).
- Définir des nouveaux arrays :

$$\mathrm{D} = x_+ - x_- \qquad \mathrm{L} = x_{\mathrm{A}'} - x_{\mathrm{A}} \qquad f' = \frac{\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2}{4\mathrm{L}}$$

L'array f' contient donc 7 estimations de la distance focale. Il est maintenant possible de faire une analyse statistique sur cette série de mesure (incertitudes de type A).

- Déterminer la valeur moyenne de la distribution (notée $\bar{f}'$ dans le cours D2, I.2) à l'aide de la commande : f_moy = np.mean(f)
- Déterminer l'écart-type de la distribution (notée $\sigma_{f'}$ dans le cours D2, I.2) à l'aide de la commande : f_std = np.std(f, ddof=1)
- En déduire l'incertitude-type sur la moyenne $u(\overline{f'})$.

$\bar{f}'$ **(cm)**	$u(\bar{f}')$ **(cm)**

La valeur de f' ainsi obtenue doit être « proche » de celle du III.2 et l'incertitude-type plus faible.

- À l'aide de la formule de l'écart normalisé (cours D2, I.3), comparer vos résultats des parties III.1 et III.2. Conclure.

III.3 - Régression linéaire

Nous allons dans cette dernière partie exploiter la relation théorique pour trouver une droite dont f' est la pente. On remarque que :

$$f' = \frac{\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2}{4\mathrm{L}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2}_{y} = \underbrace{f'}_{a} \cdot \underbrace{4\mathrm{L}}_{x}$$

Si on tracer $\mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2$ en fonction de $4\mathrm{L}$, dont doit obtenir une droite linéaire de coefficient directeur f'.

- Définir un array $y = \mathrm{L}^2 - \mathrm{D}^2$ et un array $x = 4\mathrm{L}$.
- À l'aide du polycopier de cours D3, écrire un script Python pour afficher les points expérimentaux.
- À l'aide du polycopié de cours D3, compléter votre script pour effectuer une régression linéaire et ainsi obtenir la valeur de f'.

Remarques :

- Dans le cadre du programme, seules les régressions affines $y = ax + b$ sont exigibles sur Python. Ici, on se contentera donc de remarquer que b est « proche » de 0 et ainsi identifier $a = f'$.
- Cette méthode de donne pas d'incertitude sur f' (hors programme)